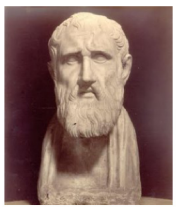
Comportement d'une suite

Transmath 2011 p.145.

Objectifs :

- Étudier le sens de variation d'une suite
- Approcher la notion de limite de suite
- Être capable d'exploiter la représentation graphique des termes d'une suite pour émettre des conjectures quant à son sens de variation et à sa limite
- Traiter à l'aide d'un tableur ou d'un algorithme des problèmes de comparaison, d'évolution ou de seuil

Aperçu historique : *Se référer au Chapitre 6 pour une introduction historique de la notion de suite.*
Dans l'Encyclopédie Raisonnée de d'Alembert et Diderot (1751), une grande part est laissée aux suites et séries dont le principal intérêt semble être leur convergence. La "convergence" d'une suite fait référence à l'existence éventuelle d'une "limite" pour cette suite ; cette limite est une valeur dont se rapprocheraient les termes de la suite lorsque n devient "très grand".
On peut faire commencer l'histoire du concept de limite avec Zénon d'Élée, qui vécut autour de 450 avant Jésus-Christ et fut un disciple de Parménide. Il est surtout connu pour ses paradoxes qui prétendent démontrer l'impossibilité du mouvement ; par exemple, pour qu'une flèche atteigne sa cible, il faut qu'elle parcoure la moitié de la distance qui la sépare de celle-ci, puis la moitié de la distance restante (soit 1/4 de la distance originelle), puis la moitié de la distance restante etc... si bien qu'il restera toujours une distance non nulle à parcourir : la flèche n'atteindrait-elle donc jamais la cible ? Une telle démarche, qui met en jeu des "moitiés" puis des "moitiés de moitiés" est appelée dichotomie *(Du grec ancien "dikhotomia", « division en deux parties »).*
Les suites géométriques sont sous-jacentes dans les paradoxes de Zénon. La limite de telles suites intervient aussi dans les "Éléments" d'Euclide (Alexandrie, env. 300 avant Jésus-Christ).
L'Analyse fit d'énormes progrès au cours des XVIIe et XVIIIe siècles. Les mathématiciens de cette époque avaient une intuition claire de la notion de limite. On trouve l'idée par exemple chez Leibniz, dans le premier article qu'il publia, en février 16822 . L'objet de cet article est de donner le nombre π comme la somme suivante :
$\pi = 4\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13}...etc...\right]$ *Et Leibniz d'écrire : « L'ensemble de la série renferme donc en bloc toutes les approximations, c'est-à-dire les valeurs immédiatement supérieures et inférieures, car, à mesure qu'on la considère de plus en plus loin, l'erreur sera moindre [...] que toute grandeur donnée. »*
Cependant, les mathématiciens de l'époque n'essayèrent pas de définir précisément le concept de limite. Ils se fiaient à leur intuition et menaient souvent des raisonnements peu rigoureux, qui parfois les induisaient en erreur.
À mesure toutefois que s'étendaient les recherches et les découvertes en Analyse au cours de XIXe siècle, la nécessité de définir clairement les concepts et les termes mis en œuvre se fit sentir. Cette mise en ordre commence avec Louis-Augustin Cauchy (1789-1857), qui fait de la limite une des notions centrales de l'Analyse. Il en donne la définition suivante dans son Cours d 'Analyse de l'École Polytechnique : « Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur finie, de manière à en différer aussi peu qu'on voudra, cette dernière est appelée limite de toutes les autres. »
Cependant c'est à l'allemand Karl Weierstrass (1815-1897) que l'on doit le langage très précis, plus mathématique, qui seul permet de raisonner correctement. Voici la définition moderne du fait qu'une suite admet une limite finie A :
On dit qu'une suite (u_n) de nombres réels admet pour limite le réel A si, pour tout réel strictement positif ϵ, aussi petit que l'on veut, il est possible de déterminer un entier naturel N, tel qu'au-delà du rang N, tous les termes de la suite u sont éloignés de A d'une distance inférieure ou égale à ϵ.


Zénon d'Élée

Euclide

Leibniz

Cauchy

Weierstrass

Pour étudier le comportement d'une suite, il peut être très utile de travailler sur sa représentation graphique (attention, il ne faut pas "relier les points") ; pour obtenir une telle représentation, on pourra utiliser un logiciel comme GeoGebra, ou bien sa calculatrice (se référer à la fiche "mode d'emploi" qui est en ligne, ou au contenu du chapitre 6), en n'oubliant pas de basculer en mode "suites".

1. Sens de variation d'une suite

A. Définition, interprétation graphique

Définition 15.1 On dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est :
- strictement croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$
- strictement décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$
- constante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$

Graphiquement, lorsque la suite est croissante, les points qui la représentent "montent", lorsqu'elle est décroissante ils "descendent", et lorsqu'elle est constante ils forment un "plateau".

Remarque 15.1 On dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est :
- croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$
- décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$

B. Méthodes d'étude et premiers exemples

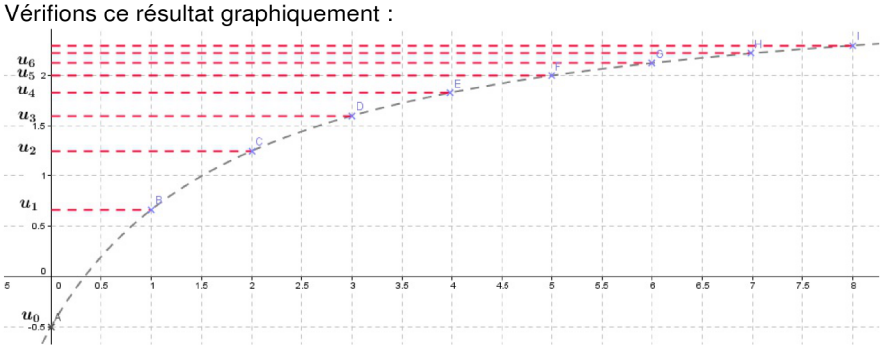
Méthode 1 : Suite définie explicitement en fonction de n.
Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est définie par une formule du type $u_n = f(n)$, où f est une fonction donnée définie sur $\mathbb{R}_+$, alors :

- Si f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante
- Si f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement décroissante

Ceci est vrai également pour une fonction f croissante ou décroissante (inégalité larges), la suite sera alors croissante ou décroissante.

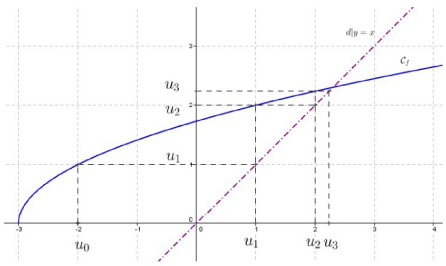
Attention, la réciproque est fausse : la suite peut être croissante sans que la fonction le soit ; en effet, f peut avoir des variations quelconques entre deux entiers consécutifs.

Exemple 15.1 Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_n = f(n)$, avec $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$, telle que $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$.
f est définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$, donc a fortiori sur $\mathbb{R}_+$; elle est également dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $f'(x) = \frac{7}{(x+2)^2}$, donc $f'(x) > 0$ et la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est donc strictement croissante.
Vérifions ce résultat graphiquement :



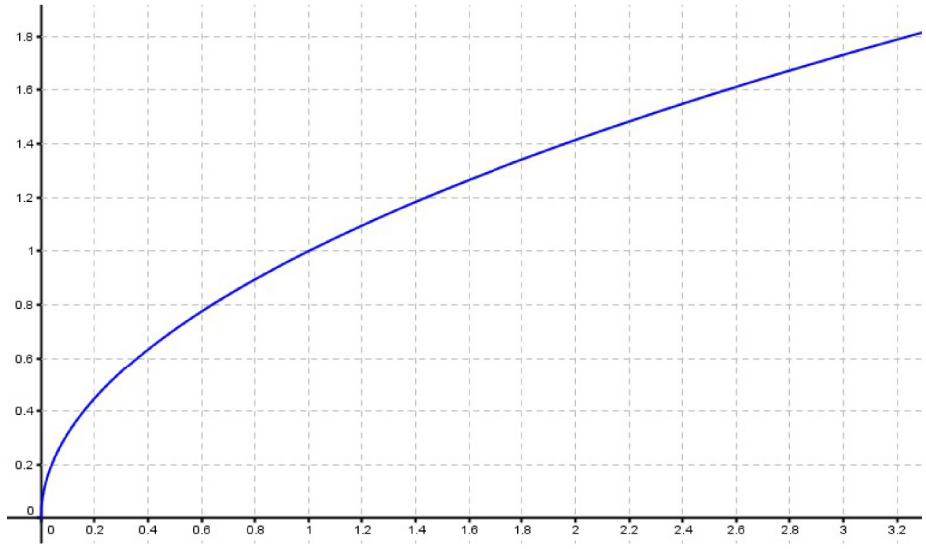
On trace le graphe de la fonction ; les indices sont en abscisse, et les termes de la suite en ordonnée. ce graphique est cohérent avec notre affirmation.

Remarque 15.2 Attention à ne pas confondre le graphique ci-dessus avec le graphique correspondant à une suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$, où l'on "rebondit" sur la diagonale pour trouver le terme suivant (voir exemple ci-contre).



Dans une suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$, ils se peut que la fonction soit croissante et la suite décroissante.

Par exemple, en posant $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$, où la fonction affine $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante, mais la suite (u_n) est décroissante... Faisons un dessin :



1. Placer u_0 sur l'axe des abscisses
2. Tracer en pointillés la "première diagonale" (droite d'équation $y = x$)
3. Tracer en pointillé le segment joignant u_0 et la diagonale, puis "rebondir" sur la diagonale : tracer en pointillés le segment horizontal joignant la diagonale et la droite qui correspond à $f(x)$
4. Tracer en pointillés le segment qui redescend vers l'axe des abscisses : l'abscisse obtenue correspond à u_1
5. Réitérer le procédé...

Méthode 2 : Différence de deux termes consécutifs.
Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0$.
Une méthode d'étude du sens de variation d'une suite consiste donc à étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ dans le cas général.

- Si $u_{n+1} - u_n > 0$, alors (u_n) est strictement croissante
- Si $u_{n+1} - u_n < 0$, alors (u_n) est strictement décroissante
- Si $u_{n+1} - u_n = 0$, alors (u_n) est constante

Cette méthode est utilisée en particulier dans le cas d'une suite arithmétique (voir Chapitre 11, Propriété 11.1).
Mais elle peut également être utile dans de nombreux autres cas :

Exemple 15.2 Soit $(v_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $\begin{cases} v_0 = 10 \\ v_{n+1} = (v_n)^2 + 3v_n + 1 \end{cases}$.
Pour étudier les variations de (v_n), on va calculer $v_{n+1} - v_n$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (v_n)^2 + 3v_n + 1 - v_n \\ &= (v_n)^2 + 2v_n + 1 \\ &= (v_n + 1)^2 \end{aligned}$$

Or $(v_n + 1)^2 > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en tant que carré.
Donc la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante.

Méthode 3 : (Suites à termes positifs) Quotient de deux termes consécutifs.
Pour $n \in \mathbb{N}$, si $u_n > 0$ [a], $u_{n+1} > u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.
Une méthode d'étude du sens de variation d'une suite consiste donc à étudier la position par rapport à 1 du quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ dans le cas général.

- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors (u_n) est strictement croissante
- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors (u_n) est strictement décroissante
- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, alors (u_n) est constante

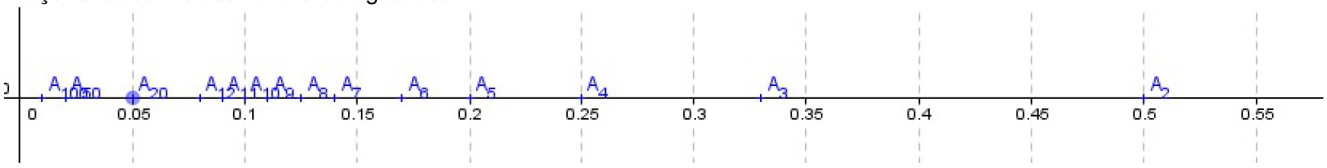
a. si $u_n = 0$ on ne peut pas diviser, et si $u_n < 0$, diviser par u_n change le sens de l'inégalité. En fait, cette méthode s'adapte aux suites dont les termes sont "de signe constant".

Cette méthode est utilisée en particulier dans le cas d'une suite géométrique (voir Chapitre 11, Propriété 11.3).
Mais elle peut également être utile dans de nombreux autres cas.

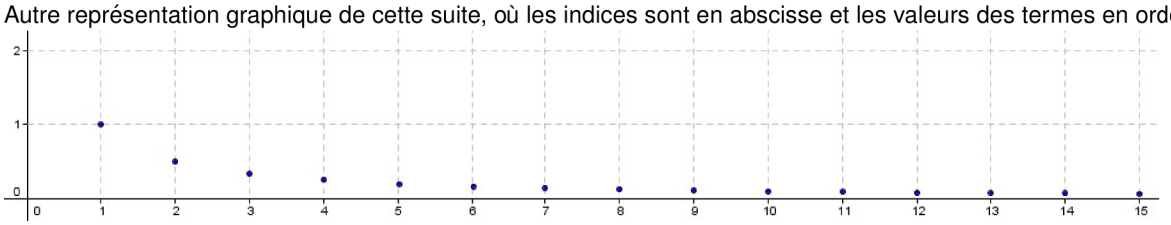
2. Approche de la notion de limite

A. Exemples d'accumulation de termes

Exemple 15.3 Considérons la suite (a_n) définie pour $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$ par $u_n = \frac{1}{n}$.
Ses premiers termes sont $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; ...; \frac{1}{10}; ...; \frac{1}{100}; ...$
Plaçons les termes sur une droite graduée :

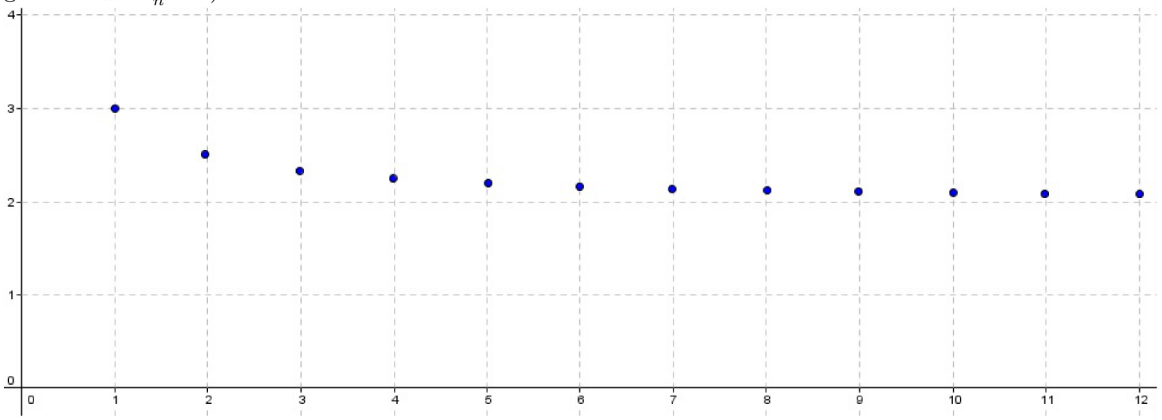


Autre représentation graphique de cette suite, où les indices sont en abscisse et les valeurs des termes en ordonnée :

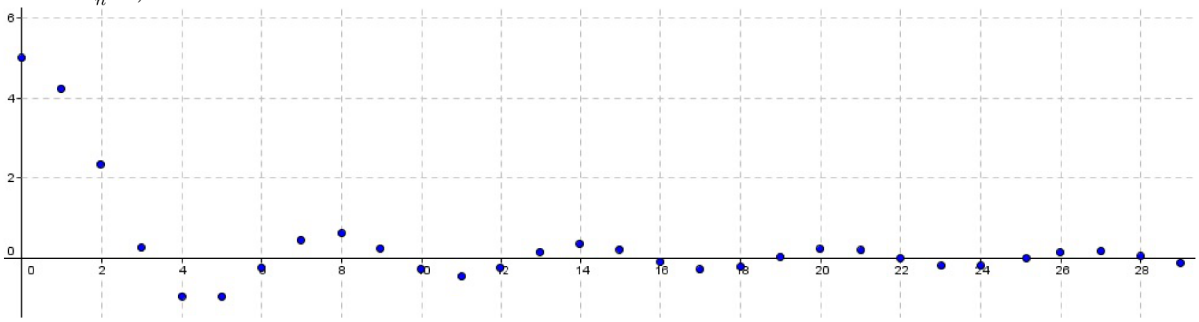


Lorsque n devient grand, les termes s'accumulent près de zéro.
On dit que la suite (a_n) a pour limite 0 lorsque n tend vers l'infini.

Bien entendu, les termes ne s'accumulent pas toujours autour de 0 ; exemple d'une suite de limite 2 (suite de terme général $u_n = \frac{1}{n} + 2$) :



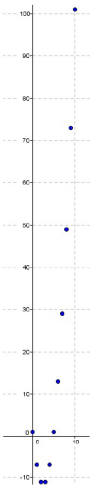
Il peut également arriver que la suite "oscille" autour de sa limite en s'en approchant (suite de terme général $u_n = \frac{5sin(n)}{n}$) :



Définition 15.2 Soient (u_n) une suite numérique et l un réel.
On dit que (u_n) a pour limite l, ou que u_n tend vers l lorsque n tend vers $+\infty$, lorsque les termes de la suite sont "aussi proche que l'on veut" de l à partir d'un certain rang.
On note $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$

Lorsqu'un suite admet une limite (finie), on dit qu'elle est convergente dans $\mathbb{R}$. Sinon, on dit qu'elle est divergente.
Si une suite est convergente, sa limite est unique.

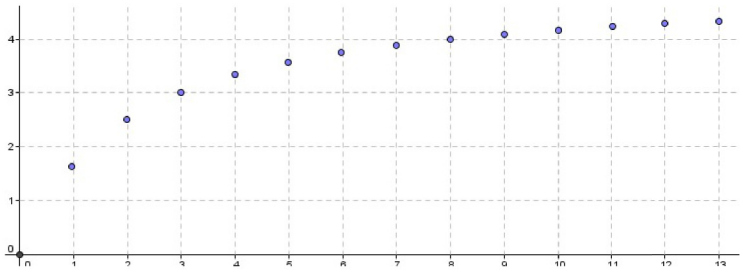
B. Exemples de ”limite infinie”



Il arrive que les termes de la suite ne s'accumulent pas auprès d'une valeur, mais deviennent de plus en plus grands (exemple ci-contre). Dans ce cas, on dit que (u_n) a pour limite $+\infty$.
Si les termes deviennent de plus en plus petits, c'est-à-dire s'il s'agit de nombres négatifs ayant des valeurs absolues de plus en plus grandes, on dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$.
On note $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$. Une suite dont les termes tendent vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque n tend vers 0 est dite divergente.
En effet, le terme ”convergente” est réservé aux limites $l \in \mathbb{R}$, or $+\infty$ et $-\infty$ n'appartiennent pas à $\mathbb{R}$.

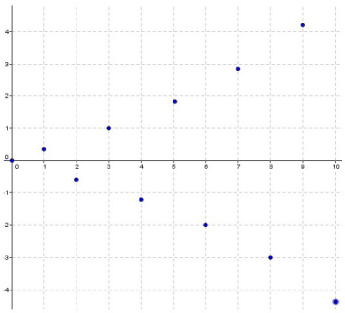
Exemple 15.4

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_n = \frac{5n}{n+2} \end{cases}$$



Cette suite est divergente, elle tend vers $+\infty$. On note $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$

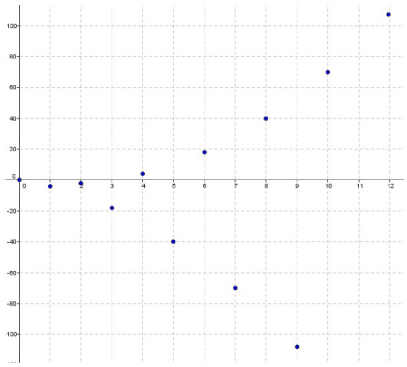
C. Exemples de dispersion de termes



Enfin, les termes de certaines suites se ”dispersent” : ils ne s'accumulent pas autour d'une valeur, et ne tendent pas non plus vers un infini (exemple ci-contre). Dans ce cas, on dit que (u_n) n'a pas de limite.
C'est un autre cas de suite divergente.

Exemple 15.5

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_n = (-1)^{Ent(n)} x^2 - 3x \end{cases}$$



Cette suite est divergente, elle tend vers $+\infty$. On note $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$